

Egy elegáns levezetésről

Az [1] műben találkoztunk a *sík tengelymetszetes egyenletének* egy általunk eddig nem látott, szép és viszonylag egyszerű levezetésével. Ehhez tekintsük az 1. ábrát, ahol az eredeti anyagrész látható!

2-125. Equation of a plane in terms of intercepts on the axes.

Let the plane cut the axes in A, B, C ; let $OA = a, OB = b, OC = c$; these are the intercepts. Let $P = [x, y, z]$ be any point on the plane. Then the tetrahedron $OABC$ is divided into three tetrahedra $OABP, OBCP, OCAP$. The volume of $OABC = \frac{1}{6}abc$, that of $OBCP = \frac{1}{6}bcx$, etc. Hence

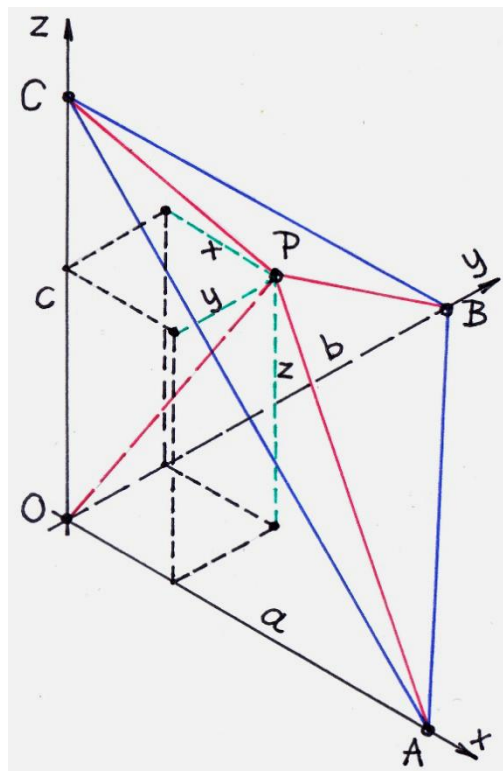
$$\frac{1}{6}bcx + \frac{1}{6}cay + \frac{1}{6}abz = \frac{1}{6}abc,$$

or
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

This equation has the same meaning when the axes are oblique.

1. ábra – forrása: [1]

Most tekintsük a 2. ábrát!



2. ábra

Itt azt látjuk, hogy az **Oxyz** derékszögű koordináta - rendszerben az **a, b, c** tengelymetszeteivel adott síkon felvettünk egy **P (x, y, z)** pontot, majd e pontot egyenesekkel összeköttöttük az **O, A, B, C** pontokkal, három tetraéderre bontva így az **OABC** tetraédert.

Tudjuk – ld.: [2], 215. o.! – , hogy a *tetraéder / háromoldalú gúla* térfogata:

$$V_{tetraéder} = \frac{1}{3} \cdot T \cdot m, \quad (1)$$

ahol

~ T : a gúla alaplapjának területe,

~ m : a gúla magassága.

A 2. ábra felbontására írhatjuk, hogy az összetevő tetraéderek térfogatainak összege egyenlő az egész tetraéder térfogatával, vagyis

$$V_{OABC} = V_{OABP} + V_{OBCP} + V_{OCAP}; \quad (2)$$

ámde a 2. ábra szerint, (1) - gyel is:

$$V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot b}{2} \cdot c = \frac{a \cdot b \cdot c}{6}, \quad (3)$$

$$V_{OABP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot b}{2} \cdot z = \frac{a \cdot b \cdot z}{6}, \quad (4)$$

$$V_{OBCP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{b \cdot c}{2} \cdot x = \frac{b \cdot c \cdot x}{6}, \quad (5)$$

$$V_{OCAP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{c \cdot a}{2} \cdot y = \frac{c \cdot a \cdot y}{6}. \quad (6)$$

Most (2), (3), (4), (5), (6) szerint:

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{6} = \frac{a \cdot b \cdot z}{6} + \frac{b \cdot c \cdot x}{6} + \frac{c \cdot a \cdot y}{6}; \text{ osztással:}$$

$$1 = \frac{z}{c} + \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \text{ azaz a szokásos alakban:}$$

$$\underline{\underline{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.}} \quad (7)$$

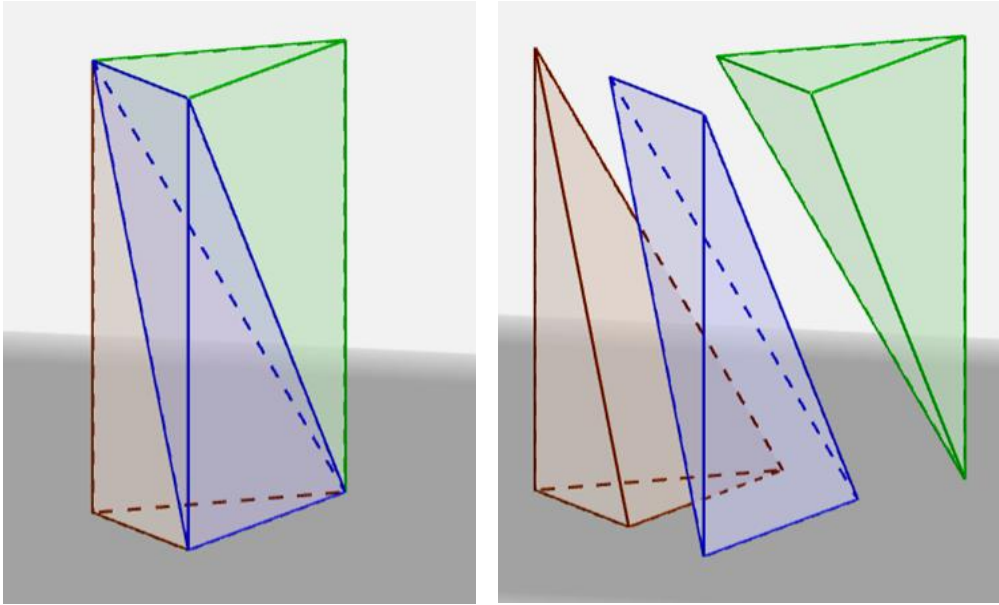
A (7) egyenlet a sík tengelymetszetes egyenlete – ld.: [2], 274. o!

Ezzel kitűzött feladatunkat – a levezetés belátását – megoldottuk.

Megjegyzések:

M1. Érdekes lehet a gondolatmenet / levezetés megfordítása is: a (7) ismertnek vett egyenletből a (2), majd (1) egyenletre juthatunk. Ez azonban kevésbé „szép dolog”, hiszen azért azt „sejtenünk kell”, hogy mit is jelentenek az (3)...(6) alakú szorzatok.

M2. Az (1) képletet a geometria órán is feldarabolással magyarázzák el – 3. ábra.



3. ábra – forrása: [3]

Eszerint:

A legegyszerűbb kúpszerű test – a tetraéder – térfogatát határozzuk meg.

A tetraéder térfogatának a képletét egy hasábbá történő kiegészítése után tudjuk levezetni.

A három tetraédeből összeállított hasáb egy háromszög alapú lesz, aminek a térfogatát már meg tudjuk határozni – az alaplapp területét megszorozzuk a hasáb magasságával.

A tetraéderek úgy lettek megszerkesztve, hogy mozgathatóak legyenek, így látszik majd, hogy egymáshoz való illesztésük után valóban egy hasábot alkotnak.

Az ábrán is látjuk, hogy a tetraéderek térfogata egyenlő.

Ezek után könnyű belátni, hogy a tetraéderek térfogatát akkor kapjuk meg, ha a hasáb térfogatát harmadoljuk.

Képlettel: $V_{tetraéder} = \frac{1}{3} \cdot T \cdot m$, ebben az esetben a T az alaplapp területét jelenti.

Általános tetraéder esetén a *Cavalieri* - elvet is alkalmazva juthatunk az (1) eredményre, a középiskolai tanulmányok során. Más a helyzet a felsőbb tanulmányokkal – 4. ábra.

A Helytelen a következő, Cavalieri-féle elvnek^{*2} mondott kijelentés: ha két testnek egy síkkal párhuzamos metszetei páronként egyenlő területűek, akkor a két test térfogata egyenlő. Ebből a követelésből a térfogat létezése nem következik. Mi többet követeltünk, és a mondott pongyola kijelentést szabatos tétellel helyettesítettük.

4. ábra – forrása: [4], 227. o.

Itt kimondják és bebizonyítják a következő tételt – [4], 210. o. – :

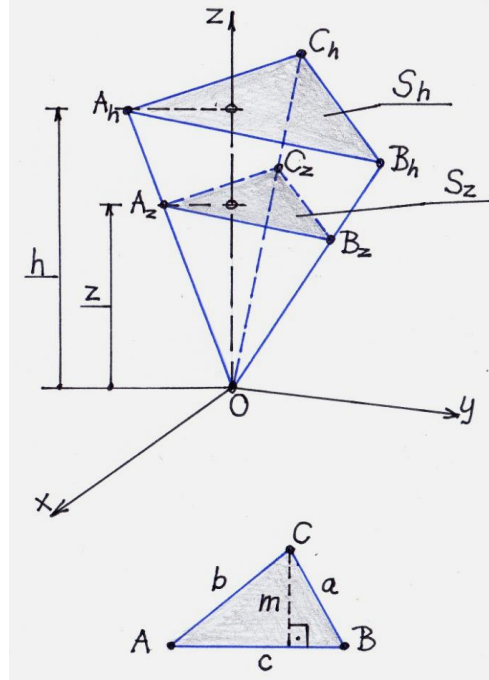
Ha két tetraéder alapterülete és magassága egyenlő, akkor egyenlő a térfogatuk is.

Valamint – [4], 212. o. – :

A tetraéder térfogata az alapterület és a magasság szorzatának harmada.

M3. Szerencsére ma már a 3. ábrához hasonló számítógéppel készített ábrákkal, illetve animációkkal is segíthető a nem is olyan egyszerű darabolási helyzet elképzelése.

M4. Az általános tetraéder térfogata integrálszámítás alkalmazásával könnyen megy. Ehhez tekintsük az 5. ábrát is!



5. ábra

Az általános háromszög alapú ferde gúla térfogata:

$$V = \int_0^h S(z) dz. \quad (8)$$

A gúla keresztmetszeti területe z magasságban:

$$S(z) = \frac{1}{2} \cdot c(z) \cdot m(z); \quad (9)$$

ámde a *párhuzamos szelők tétele* alapján felírhatók a következő arányok:

$$\frac{c(z)}{c(h)} = \frac{z}{h} \rightarrow c(z) = c(h) \cdot \frac{z}{h}, \quad (10)$$

$$\frac{m(z)}{m(h)} = \frac{z}{h} \rightarrow m(z) = m(h) \cdot \frac{z}{h}, \quad (11)$$

így (9), (10), (11) - gyel:

$$S(z) = \frac{1}{2} \cdot c(h) \cdot \frac{z}{h} \cdot m(h) \cdot \frac{z}{h} = \frac{1}{2} \cdot c(h) \cdot m(h) \cdot \frac{z^2}{h^2} = \frac{S(h)}{h^2} \cdot z^2, \text{ tehát:} \\ S(z) = \frac{S(h)}{h^2} \cdot z^2. \quad (12)$$

Most (8) és (12) - vel:

$$V = \int_0^h \frac{S(h)}{h^2} \cdot z^2 dz = \frac{S(h)}{h^2} \cdot \int_0^h z^2 dz = \frac{S(h)}{h^2} \cdot \frac{z^3}{3} \Big|_0^h = \frac{S(h)}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot S(h) \cdot h, \text{ azaz:}$$

$$\underline{V = \frac{1}{3} \cdot S(h) \cdot h \equiv \frac{1}{3} \cdot A \cdot h,} \quad (13)$$

a [2] szerinti jelölésekkel is.

Mint hogy egy általános sokszög háromszögekre bontható, így az általános gúla háromszög alapú gúlákra bontható, így térfogatára:

$$V_{gúla} = \sum V_i = \sum \frac{1}{3} \cdot A_i \cdot h = \frac{h}{3} \cdot \sum A_i = \frac{h}{3} \cdot A, \text{ azaz:}$$

$$V_{gúla} = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h. \quad (14)$$

Mivel az általános tetraéder egy háromoldalú gúla, ezért

$$V_{tetraéder} = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h. \quad (15)$$

Ezzel beláttuk az (1) képlet helyességét is.

M5. [5] - ben (a 104. oldalon) a számítás után megjegyzik, hogy

„A gúla térfogata egyenlő az alapterület és a magasság szorzatának egyharmadával.

E képlet levezetése a térmértanban az integrál alkalmazása nélkül jóval bonyolultabb.”

Ez szerintünk egy igencsak figyelemre méltó megállapítás. Emlékezhetünk, hogy a középiskolai geometria - tanulás nem éppen derűs része volt sokunknak az (1) képlet belátása, a 3. ábrával kapcsolatban mondtak szerint. Integrálszámítással ez ujjgyakorlatnak mondható. Persze, értjük / érteni véljük a leendő matematika - tanárokat tanító matematikus, valamint a fizikus, mérnök, illetve gyakorlati szakember elmélet - igénye közti különbséget.

M6. A Cavalieri - elv [5] - ben (a 221. oldalon) is előkerül; itt nem viselkednek ezzel szemben olyan elutasítóan, mint ahogyan azt láttuk a [4] szerinti 4. ábrán.

Igaz, hogy itt a Cavalieri - elvet egy (8) - hoz hasonló

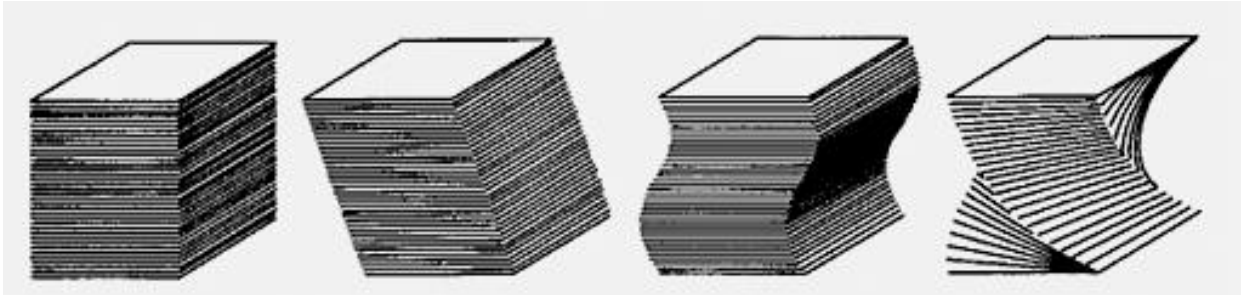
$$V = \int_{x_0}^{x_1} S(x) dx \quad (16)$$

kifejezésre alapozva mutatják be.

„Az – itt (16) – formulából bizonyítható Cavalieri következő elvének érvényessége:

helyezzünk el két testet két egymással párhuzamos sík, **P** és **Q** síkok között. Ha a testeknek a **P** és **Q** síkokkal párhuzamos valamennyi síkmetszete rendre egyenlő területű (vagyis egyenlők az **S(x)** integrandus függvények), akkor e testek térfogatai is egyenlők.”

Ezt szemlélteti a 6. ábra is. Itt egymásra helyezett, majd egymáson elcsúsztatott és / vagy elforgatott lapokkal mutatják be / szemléltetik azt a tényt, hogy az elmozgatás előtti és utáni térfogatok egyenlők. Bármit is mondjanak mások, szerintünk ez egy szép és hasznos elv. Köszönjük, signore Cavalieri!



6. ábra – forrása: [6]

M7. A tetraéder szó jelentése: *négylapú test*. Ebből egy az alaplap, három az oldallap. Ezért is beszélünk háromoldalú vagy háromszög alapú gúláról – [7].

M8. Az elején nem gondoltuk, hogy ez lesz a vége. Nem bánjuk, hogy így alakult.

Források:

[1] – **D. M. Y. Sommerville:** Analytical Geometry of Three Dimensions
Cambridge, University Press, 1939.

[2] – **I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev:** Matematikai zsebkönyv
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

[3] – <http://tananyag.geomatech.hu/m/112631>

[4] – **Hajós György:** Bevezetés a geometriába
6. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

[5] – **Ja. B. Zeldovics:** Ismerkedés a felsőbb matematikával és fizikai alkalmazásaival
Gondolat Kiadó, Budapest, 1981.

[6] – http://www.mathpoint.ch/17stereometrie/stereo_modelle_72dpi/cavalieri2.jpg

[7] – <https://hu.wikipedia.org/wiki/Tetra%C3%A9der>

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
mérnökstanár

Sződliget, 2019. január 2.